Ορισμός - Συμβολισμός:

$2=1+1$ $\quad 5=4+1$ $\quad 8=7+1$

$3=2+1$ $\quad 6=5+1$ $\quad 9=8+1$

$4=3+1$

Για $1\leq \alpha \leq 9$, με $\alpha\in\mathbb{N}$ κ' $\beta\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$\alpha\beta=\alpha\cdot 10+\beta$

Ομοίως ορίζονται οι τριψήφιοι

$\alpha\beta\gamma=\alpha\cdot 10\cdot 10+\beta\cdot 10+\gamma$ κτλ.

Πρόταση: Το σύνολο $\mathbb{N}$ (με τη διάταξη που επάγεται σε αυτό το $\mathbb{R}$) είναι καλά διατεταγμένο σύνολο

[δηλ. $\forall A\subseteq\mathbb{N}$, με $A\neq\emptyset$ το A έχει ελάχιστο στοιχείο]

Απόδειξη: Έστω $A\subseteq\mathbb{N}$, $A\neq\emptyset$

Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι το A δεν έχει ελάχιστο στοιχείο

Θέτουμε $B=\{x\in\mathbb{N}, x$ κφ του $A\}$

Αποδεικνύεται ότι:

→ $A \cap B = \emptyset$

→ Το B είναι επαγωγικό. Προκύπτει ότι $\mathbb{N} \subseteq B$.

Έστω τυχόν $\alpha \in A$, τότε $\forall n \in \mathbb{N}$ ισχύει $n \in B$, άρα $n \leq \alpha$.

Άρα το α είναι ανώ το $\mathbb{N}$, άτοπο.

<u>Πρόταση</u>: Αν $P(\ )$ ένας προτασιακός τύπος με σύνολο αναφοράς το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών ώστε:

(α) $P(1)$ αληθής

(β) $\forall x \in \mathbb{N}$: Αν $P(x)$ αληθής, τότε $P(x+1)$ αληθής,

τότε η $P(x)$ $\forall x \in \mathbb{N}$

<u>Απόδειξη</u>:

Το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{N} \ \ P(x) \text{ αληθής}\}$ είναι επαγωγικό (λόγω των (α), (β)), άρα $\mathbb{N} \subseteq A$

<u>Πρόταση</u>: Αν $P(\ )$ προτασιακός τύπος με σύνολο αναφοράς το $\mathbb{N}$ ώστε:

(α) $P(1)$ αληθής

(β) $\forall x \in \mathbb{N}$ αν η $P(n)$ είναι αληθής για $\forall n \in \mathbb{N}$ με $n < x$, τότε $P(x)$ αληθής, τότε $P(x)$ αληθής $\forall x \in \mathbb{N}$.

<u>Απόδειξη</u>: Θεωρούμε το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{N} \ P(x) \text{ δεν είναι αληθής}\}$

Αν $A \neq \emptyset$, τότε το A έχει ελάχιστο στοιχείο

Αν $x = \min A$ $\forall n < x$ η $P(n)$ ισχύει, άρα από το (β) η $P(x)$ ισχύει, άτοπο.

· Η επαγωγή χρησιμοποιείται κ' για τον ορισμό εννοιών. Σε αυτήν την περίπτωση καλείται αναδρομή.

"Αναδρομικός ορισμός"

π.χ. $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ φορές}}$ Θέλω να το ορίσω χωρίς τα (....).

Αναδρομικός ορισμός:

1) Αν $a \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $a^1 = a$, $a^{n+1} = a^n a$

[Έτσι έχει οριστεί το a^n $\forall n \in \mathbb{N}$] Επιπλέον αν $a \neq 0$ ορίζουμε $a^0 = 1$

Άσκηση: $\forall n, m \in \mathbb{N}$ ισχύει $a^{m+n} = a^n a^m$

Λύση: Με επαγωγή.

Κρατάμε σταθερό το n κ' κάνουμε επαγωγή στο m

2) Ορίζουμε $1! = 1$ κ' $(n+1)! = n!(n+1)$

[Έτσι έχει οριστεί το $n!$ $\forall n \in \mathbb{N}$]

Επιπλέον ορίζουμε $0! = 1$

3) Αν $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μία ακολουθία πραγματικών αριθμών.

$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cancel{a_2 + \cdots} + a_n$ Δεν θέλω τα (...)

Ορίζουμε $\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1}$

Ομοίως ορίζονται τα αθροίσματα της μορφής $\sum_{k=0}^{n} a_k$ ή $\sum_{k=-n}^{n} a_k$

· Αν πάρω $n \in \mathbb{N}$ κ' $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ με $0 \leq k \leq n$ ορίζουμε:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

: Συνδυασμοί n ανά k.

"Τον τρόπο με τον οποίο αν έχω ένα σύνολο n αντικειμένων μπορώ να επιλέξω k από αυτά"

(π.χ) Ίδιο ερώτημα για 2020 αντί για 2018
ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ. $ΜΚΔ(2020,21)=1$

Λύση: Έστω ότι $ΜΚΔ(2020,21)\neq 1$. Τότε $\exists$ πρώτος p με $p|2020$ κ' $p|21=3\cdot 7$. Άρα $p=3$ ή $p=7$. Αλλά $2+2=4$ κ' $3\nmid 4$, άρα $3\nmid 2020$. Έχουμε $2020=288\cdot 7+4$, άρα $7\nmid 2020$, αντίφαση.

Συνεπώς, $\exists$ $372+1=373$ ακέραιοι μεταξύ του 1368 κ' του 2020 πρώτοι με το 21.

Ορισμός: Έστω $n\geq 1$. κ' $b_1, b_2, \ldots, b_{\phi(n)}$
$\phi(n)$ το πλήθος ακέραιοι. Λέμε ότι αποτελούν ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΕΝΟ (ή ανηγμένο) ΣΥΣΤΗΜΑ ΥΠΟΛΟΙΠΩΝ modn, αν

$$\{[b_1]_n, [b_2]_n, \ldots, [b_{\phi(n)}]_n\}=U(\mathbb{Z}/n)$$

(π.χ) $n=6$ $U(\mathbb{Z}/6)=\{[1]_6, [5]_6\}$

$$\phi(6)=\phi(2\cdot 3)=6\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=2$$

Άρα το $b_1=7$, $b_2=17$ είναι περιορισμένο σύστημα υπολοίπων mod6, γιατί $[b_1]_6=[1]_6$, $[b_2]_6=[17]_6=[5]_6$.

ενώ το $b_1=7$, $b_2=37$ ΔΕΝ είναι, γιατί:

$$[7]_6=[1]_6,\ [37]_6=[1]_6.$$

άρα $\{[7]_6, [37]_6\}=\{[1]_6\}\neq U(\mathbb{Z}/6)$

Πρόταση: Έστω $n\geq 2$ κ' $b_1, b_2, \ldots, b_{\phi(n)}$ ακέραιοι. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.
(i) $b_1, \ldots, b_{\phi(n)}$ ΠΣΥ modn
(ii) $ΜΚΔ(b_i, n)=1$ $\forall i$ κ' $[b_i]_n\neq[b_j]_n$ για $i\neq j$

Απόδειξη: Παρόμοια με την αντίστοιχη για Πλήρη Συστήματα Υπολοίπων modn

$$\alpha^{\nu+1} + \sum_{k=1}^{\nu}\binom{\nu}{k}\alpha^{\nu+1-k}\beta^{k} + \sum_{k=1}^{\nu}\binom{\nu}{k-1}\alpha^{\nu+1-k}\beta^{k} + \beta^{\nu+1} =$$

← ξεχωρίζω τον όρο που προκύπτει για $d=\nu+1$

$$= \alpha^{\nu+1} + \sum_{k=1}^{\nu}\left(\binom{\nu}{k}+\binom{\nu}{k-1}\right)\alpha^{\nu+1-k}\beta^{k} + \beta^{\nu+1} =$$

$$= \alpha^{\nu+1} + \sum_{k=1}^{\nu}\binom{\nu+1}{k}\alpha^{\nu+1-k}\beta^{k} + \beta^{\nu+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\nu+1}\binom{\nu+1}{k}\alpha^{\nu+1-k}\beta^{k}$$

όμως για $k=0$

$$\sum_{k=1}^{\nu}\binom{\nu+1}{k}\alpha^{\nu+1-k}\beta^{k} = \alpha^{\nu+1}$$

κ' για $k=\nu+1$:

$$\sum_{k=1}^{\nu}\binom{\nu+1}{k}\alpha^{\nu+1-k}\beta^{k} = \beta^{k+1}$$

άρα μπορούμε να το εντάξουμε στο άθροισμα.

Άσκηση: νδο $1^3+2^3+\dots+\nu^3 = \dfrac{\nu^2(\nu+1)^2}{4}$

ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ορισμός: $\mathbb{Z} := \mathbb{N}\cup\{0\}\cup\{x\in\mathbb{R} : -x\in\mathbb{N}\} = \mathbb{N}\cup\{0\}\cup\{-x : x\in\mathbb{N}\}$

Το σύνολο των ακέραιων αριθμών.

Παρατήρηση: Έστω $z\in\mathbb{R}$.

Το z είναι ακέραιος αν $\exists\, x,y\in\mathbb{N}$ με $z=x-y$

Απόδειξη: $\Rightarrow$) (α) $z\in\mathbb{N}$ $z=(z+1)-1$ με $z+1, 1\in\mathbb{N}$

(β) $z=0$, $z=1-1$

(γ) $z=-\nu$, με $\nu\in\mathbb{N}$, τότε $z=1-(\nu+1)$ με $1,\nu+1\in\mathbb{N}$

$\Leftarrow$) Αν $z=x-y$, με $x,y\in\mathbb{N}$

(α) Αν $x=y$, τότε $z=0\in\mathbb{Z}$

(β) Αν $y<x$, $x-y\in\mathbb{N}$, άρα $x-y\in\mathbb{Z}$

(γ) Αν $x<y$, τότε $y-x\in\mathbb{N}$, άρα $-(y-x)\in\mathbb{Z}$, δηλαδή $x-y\in\mathbb{Z}$